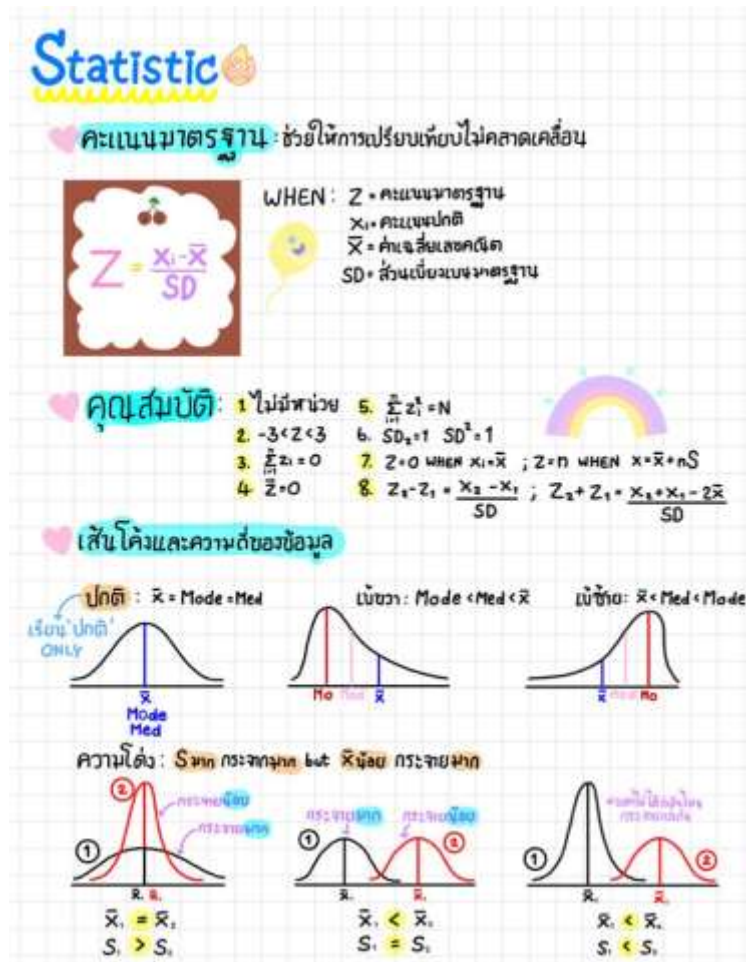


เอกสารประกอบการเรียนการสอน รายวิชาคณิตศาสตร์ รหัสวิชา ค33201



ครูผู้สอน นางอภิขญา มีทอง

โรงเรียนราชประชาสถาย ฝ่ายมัธยม รัชดาภิเษก ในพระบรมราชูปถัมภ์

กรอบที่1 ความเข้าใจเกี่ยวกับการแจกแจงปกติ



สวัสดีค่ะนักเรียน

กรอบที่ 1 ของบทเรียน

สำเร็จรูป ลองมาทำความเข้าใจ
เกี่ยวกับการแจกแจงปกติกันนะคะ

การแจกแจงปกติ

ในบทเรียนสำเร็จรูปเล่มที่ 1-3 เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นโดยใช้ค่ากลางของข้อมูลและการวัดตำแหน่งที่หรือตำแหน่งสัมพัทธ์ ตลอดจนการกระจายของข้อมูล ซึ่งเป็นเรื่องจำเป็นเพราะการเลือกใช้ค่าสถิติและคำนวณจะได้ถูกต้องเหมาะสม สามารถบอกสารสนเทศเกี่ยวกับเรื่องที่สนใจศึกษาและนำไปใช้เป็นข้อมูลสำหรับการตัดสินใจหรือวางแผนต่อไปได้อย่างเหมาะสม

นอกจากเนื้อดังกล่าวข้างต้นแล้ว เรื่องสำคัญอีกประการ คือ รูปแบบของการแจกแจงของข้อมูล รูปแบบหรือลักษณะของการแจกแจงข้อมูลซึ่งจะบอกให้ทราบว่า ข้อมูลในเรื่องนั้นทั้งหมดมีลักษณะปกติ สมมาตร หรือมีความเบ้ หรือมีความโค้งอย่างไร หรือไม่สามารถจัดรูปแบบใด ๆ ได้เลย ผู้เรียนได้รู้จักลักษณะการแจกแจงของข้อมูลบ้างแล้ว โดยสังเกตจาก ฮิสโทแกรม แผนภาพต้นไม้-ใบ เส้นโค้งความถี่ ฯลฯ

สำหรับเรื่องที่จะศึกษาต่อไปนี้เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับลักษณะการแจกแจงของข้อมูลอีกลักษณะหนึ่ง ซึ่งใช้ลักษณะของการแจกแจงหลัก สำหรับการนำไปประยุกต์กับการแจกแจงลักษณะอื่น ๆ ต่อไปได้ นั่นคือ การแจกแจงปกติ (normal distribution)

โดยทั่วไป ถ้าต้องการหาสารสนเทศให้ครบถ้วน ในประเด็นหลัก ๆ ของสถิติ เรื่องหนึ่ง เรื่องใดแล้วควรพิจารณา 3 เรื่อง คือ ค่ากลาง การกระจาย และลักษณะการแจกแจงของข้อมูล ซึ่งเมื่อใช้ครบทั้งสามอย่างนี้แล้ว จะช่วยชี้ให้เห็นลักษณะของข้อมูลชัดเจนยิ่งขึ้นว่า ข้อมูลทั้งหมด บอกสารสนเทศอะไร และด้วยข้อมูลดังกล่าว ควรวางแผนหรือตัดสินใจทำอะไรต่อไป รูปแบบของการแจกแจงจึงเป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่ง

ประโยชน์ของการแจกแจงปกติที่ควรทราบในเบื้องต้น คือ การใช้การแจกแจงปกติมาช่วยในการหาความน่าจะเป็นของข้อมูลที่สนใจ ในบทเรียนสำเร็จรูป เล่มที่ 4 จะกล่าวถึงการแจกแจงปกติ และเส้นโค้งปกติ (normal curve) ซึ่งเกี่ยวข้องกับคะแนนมาตรฐาน (standard score หรือ Z - score) คะแนนมาตรฐานมีประโยชน์หลายประการ เช่น ใช้ในการวัดตำแหน่งที่หรือตำแหน่งสัมพัทธ์ของข้อมูล ใช้ในการเปรียบเทียบข้อมูล และใช้เป็นพื้นฐานของการคำนวณพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ และความน่าจะเป็น ดังนั้น ควรศึกษาเรื่องการแจกแจงปกติไปพร้อม ๆ กับเรื่องคะแนนมาตรฐาน และการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติด้วย



เห็นความสำคัญ และประโยชน์ของ
การแจกแจงปกติแล้ว ในกรอบ
ต่อไปเราจะได้ศึกษาความรู้เกี่ยวกับ
คะแนนมาตรฐานกันค่ะ

กรอบที่ 2 คะแนนมาตรฐาน



กำลังคิดอยู่ใช่ไหมคะ..

ลองกลับไปอ่านกรอบที่ 1
อาจจะได้แนวคิดดี ๆ นะคะ



หาค่า Z - score ได้มั๊ยครับ

สวัสดีค่ะนักเรียน...ครูมีคำถาม
ให้ร่วมกันอภิปรายค่ะ...

ด.ช. เจม เรียนวิชาคณิตศาสตร์
อยู่ในเกณฑ์ค่อนข้างดี มาตั้งแต่ ม.5
จนปัจจุบันเรียน ม.6 แล้วตอนที่เรียน
อยู่ชั้น ม.5 สอบได้ 75 คะแนน
จากคะแนนเต็ม 100 ในขณะที่ คะแนน
และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของกลุ่ม
เท่ากับ 70 และ 5 ตามลำดับ แต่พอ
เรียนชั้น ม.6 เขาสอบได้คะแนน
78 คะแนน จากคะแนนเต็ม 100
คะแนน โดยมีคะแนนเฉลี่ย
และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ
80 และ 4 ตามลำดับ

ด.ช. เจมเรียนวิชาคณิตศาสตร์
ในระดับชั้นใดได้ดีกว่ากัน
**การเปรียบเทียบข้อมูลตั้งแต่สอง
ข้อมูลขึ้นไปที่มาจากข้อมูลคนละชุด

การเปรียบเทียบข้อมูลตั้งแต่สองข้อมูลขึ้นไปที่มาจากข้อมูลคนละชุดว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่เพียงไร บางครั้งไม่สามารถเปรียบเทียบโดยตรงได้ ทั้งนี้เนื่องจากค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลแต่ละชุด และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมักจะไม่เท่ากัน เช่น ต้องการเปรียบเทียบผลการเรียนวิชาภาษาอังกฤษและวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนคนใดคนหนึ่งในชั้นว่าเรียนวิชาไหนได้ดีกว่ากัน แม้ว่าจะทำได้โดยดูจากคะแนนสอบสองวิชาทั้งสอง โดยปรับให้มีคะแนนเต็มเท่ากัน ถ้าคะแนนสอบของวิชาไหนดีวกว่าก็สรุปว่านักเรียนคนนั้นเรียนวิชานั้นได้ดีกว่า ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นการสรุปผลที่ยังไม่ถูกต้องนัก เพราะค่าเฉลี่ยเลขคณิตหรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาทั้งสองของนักเรียนทั้งหมดในชั้นอาจจะไม่เท่ากัน ทั้งนี้อาจเนื่องมาจากเนื้อหาหรือข้อสอบของทั้งสองวิชามีความยากง่ายต่างกัน หรือผู้สอนแต่ละวิชามีวิธีการสอนที่จะทำให้ นักเรียนมีความเข้าใจในวิชานั้น ๆ ต่างกัน เป็นต้น ดังนั้นเพื่อที่จะให้การเปรียบเทียบมีความถูกต้องมากขึ้น จึงมีความจำเป็นต้องแปลงคะแนนของวิชาทั้งสองที่นักเรียนคนนั้นสอบได้ให้เป็นคะแนนมาตรฐานหรือค่ามาตรฐาน (ซึ่งมีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากันเสียก่อน) แล้วจึงเปรียบเทียบคะแนนมาตรฐานของวิชาทั้งสอง การแปลงค่าของข้อมูลของตัวแปรแต่ละตัวให้เป็นคะแนนมาตรฐานนี้ โดยทั่วไปคือการแปลงข้อมูลให้เป็นคะแนนมาตรฐานที่มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1

ถ้า x_i เป็นค่าที่ i ของตัวแปร X แล้ว คะแนนมาตรฐานของ x_i คือ

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad \text{เมื่อ } i \text{ คือ } 1, 2, 3, \dots, N$$

โดย x_i แทน ค่าที่ i ของตัวแปร X

μ แทน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร

σ แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร

N แทน จำนวนประชากร

หรือ
$$Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S} \quad \text{เมื่อ } i \text{ คือ } 1, 2, 3, \dots, n$$

โดย x_i แทน ค่าที่ i ของตัวแปร X

$\bar{X}$ แทน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวอย่าง

S แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวอย่าง

n แทน จำนวนตัวอย่าง

อาจกล่าวได้ว่าคะแนนมาตรฐานเป็นค่าที่บอกให้ทราบว่า ความแตกต่างระหว่างค่าของข้อมูลนั้น ๆ กับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนั้นว่าเป็นกี่เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังนั้น คะแนนมาตรฐานจึงเป็นค่าวัดตำแหน่งที่ของข้อมูลหรือวัดตำแหน่งสัมพัทธ์ของข้อมูล ที่นิยมใช้อีกวิธีหนึ่งด้วย

ตัวอย่างที่ 1 นักเรียนคนหนึ่งสอบวิชาฟิสิกส์กับวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 100 คะแนน เท่ากัน ได้ 75 คะแนน และ 78 คะแนน ตามลำดับ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนห้องนี้เป็น 72 และ 10 คะแนน ตามลำดับ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องนี้เป็น 70 และ 15 คะแนน ตามลำดับ จงเปรียบเทียบดูว่านักเรียนคนนี้เรียนวิชาอะไรได้ดีกว่ากัน

แนวคิด

1) พิจารณาโจทย์

ผลการสอบวิชาฟิสิกส์ จะได้ $\bar{X} = 72$, $x_i = 75$ และ $S = 10$

ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ จะได้ $\bar{X} = 70$, $x_i = 78$ และ $S = 15$

2) ใช้สูตรหาคะแนนมาตรฐาน
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

วิธีทำ

จากสูตร
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ คือ

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{75 - 72}{10} \\ &= \frac{3}{10} \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ คือ 0.3

ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ คือ

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{78 - 70}{15} \\ &= \frac{8}{15} \\ &= 0.533 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่ามาตรฐานของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ คือ 0.533

ดังนั้น นักเรียนคนนี้เรียนวิชาคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าวิชาฟิสิกส์

ตัวอย่างที่ 2 คะแนนสอบวิชาเคมีของนักเรียนห้องหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 75 และ 12 คะแนน ตามลำดับ ถ้าคะแนนมาตรฐานของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้ คือ 0.5 อยากทราบว่านักเรียนคนนี้สอบได้ที่คะแนน

แนวคิด

1) พิจารณาโจทย์

ผลการสอบวิชาเคมี จะได้ $\bar{X} = 75$ และ $S = 12$

2) ใช้สูตรหาคะแนนมาตรฐาน $Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ แล้วแก้สมการเพื่อหา x_i

วิธีทำ

จากสูตร
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$$0.5 = \frac{x_i - 75}{12}$$

$$6 = x_i - 75$$

$$6 + 75 = x_i$$

$$81 = x_i$$

ดังนั้น นักเรียนคนนี้สอบได้ 81 คะแนน



ข้อสังเกตเกี่ยวกับคะแนนมาตรฐาน

1. คะแนนมาตรฐานของข้อมูลใด ๆ จะเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับค่าของจำนวนนั้น ๆ กับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนั้นว่าค่าใดจะมากกว่ากัน
2. คะแนนมาตรฐานของข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติหรือใกล้เคียงปกติ โดยทั่วไปจะมีค่าตั้งแต่ -3 ถึง 3 แต่อาจมีคะแนนมาตรฐานของข้อมูลบางค่าที่น้อยกว่า -3 หรือมากกว่า 3 ได้
3. เมื่อแปลงทุก ๆ ค่าในข้อมูลชุดใดชุดหนึ่งที่เป็นข้อมูลระดับประชากรให้เป็นคะแนนมาตรฐานแล้วนำคะแนนมาตรฐานเหล่านี้มาคำนวณหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1 เสมอ

กรอบที่ 3 แบบฝึกทักษะ การหาคะแนนมาตรฐาน

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\bar{X} = 20$ และ $S = 4$ จงหาคะแนนมาตรฐานของ 25

แนวคิด

- 1) พิจารณาโจทย์ $\bar{X} = 20$ และ $S = 4$
- 2) ต้องการหาคะแนนมาตรฐานของ 25
- 3) ใช้สูตรหาคะแนนมาตรฐาน $Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$
- 4) ดำเนินการแทนค่าในสูตร $Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$ เพื่อหาคำตอบ

วิธีทำ หาคะแนนมาตรฐานของ 25

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้} \quad Z &= \frac{x_i - \bar{X}}{S} \\
 &= \frac{25 - 20}{4} \\
 &= \frac{5}{4} \\
 &= 1.25
 \end{aligned}$$

ดังนั้น คะแนนมาตรฐานของ 25 คือ 1.25



นักเรียนศึกษาตัวอย่างพร้อมแนวคิด
ที่แตกต่างเพิ่มเติมในตัวอย่างที่ 2 ด้วยนะคะ

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $Z_i = 2$, $\bar{X} = 20$ และ $S = 3$ จงหาค่าของ X_i

แนวคิด

1) พิจารณาโจทย์ $\bar{X} = 20$ และ $S = 3$

2) ทราบคะแนนมาตรฐานของ x_i นั่นคือ $Z_i = 2$

3) ใช้สูตรหาคะแนนมาตรฐาน $Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$

4) ดำเนินการแทนค่าในสูตร $Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$ แล้วแก้สมการหาคำตอบ

วิธีทำ หาคะแนน x_i

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

$$2 = \frac{x_i - 20}{3}$$

$$6 = x_i - 20$$

$$6 + 20 = x_i$$

$$26 = x_i$$

ดังนั้น คะแนน เท่ากับ 26

ตัวอย่างที่ 3-4 ก็ง่ายครับเพื่อน ๆ

เห็นด้วยมั๊ยครับ



1. กำหนด $\bar{X} = 30$ และ $S = 5$ จงหาคะแนนมาตรฐานของ 40 (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนนมาตรฐานของ 40

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนนมาตรฐานของ 40 คือ

2. กำหนด $\bar{X} = 72$ และ $S = 6$ จงหาคะแนนมาตรฐานของ 54 (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนนมาตรฐานของ 54

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนนมาตรฐานของ 54 คือ

ได้ศึกษาแนวคิด ทำแบบฝึกทักษะ 3 ข้อ แรก สนุก มาก ๆ ครับ
อยากฝึกทักษะเพิ่มอีกครับผม



3. กำหนด $\bar{X} = 25$ และ $S^2 = 16$ จงหาคะแนนมาตรฐานของ 24 (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนนมาตรฐานของ 24

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนนมาตรฐานของ 24 คือ

4. กำหนด $\bar{X} = 16$ และ $S^2 = 8$ จงหาคะแนนมาตรฐานของ 20 (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนนมาตรฐานของ 20

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนนมาตรฐานของ 20 คือ



5. กำหนด $\bar{X} = 16$ และ $S^2 = 8$ จงหาคะแนนมาตรฐานของ 20 (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนนมาตรฐานของ 20

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนนมาตรฐานของ 20 คือ

6. กำหนด $Z_i = 1.2$, $\bar{X} = 68$ และ $S = 15$ จงหาค่าของ X_i (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนน x_i

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

=

=

=

ดังนั้น คะแนน เท่ากับ



7. กำหนด $Z_i = 1.25$, $\bar{X} = 38$ และ $S = 4$ จงหาค่าของ X_i (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนน x_i

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนน เท่ากับ

8. กำหนด $Z_i = 2.4$, $\bar{X} = 24$ และ $S = 5$ จงหาค่าของ X_i (1 คะแนน)

วิธีทำ หาคะแนน x_i

จะได้
$$Z = \frac{x_i - \bar{X}}{S}$$

=

=

=

=

=

=

ดังนั้น คะแนน เท่ากับ



9. ในการสอบครั้งหนึ่ง ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเป็น 500 และ 50 คะแนน ตามลำดับ ถ้า ค.ญ.อิมเมมสอบได้คะแนน 600 คะแนน จะได้คะแนนมาตรฐานเป็นเท่าไร (1 คะแนน)

วิธีทำ จากสูตร
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

=

=

=

ดังนั้น คะแนนมาตรฐาน เท่ากับ

10. ในการสอบชิงทุนการศึกษาครั้งหนึ่ง มีเงื่อนไขว่าผู้ได้รับทุนต้องผ่านการสอบข้อเขียน ด้วยค่ามาตรฐานของคะแนนตั้งแต่ 2 ขึ้นไป ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบของผู้สมัครทั้งหมดเท่ากับ 350 และ 30 คะแนนตามลำดับ ผู้ที่ผ่านข้อเขียน ต้องได้คะแนนอย่างน้อยกี่คะแนน (1 คะแนน)

วิธีทำ

จากสูตร
$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

=

=

=

=

ดังนั้น ผู้ที่ผ่านข้อเขียนต้องได้คะแนนอย่างน้อย คะแนน

